

本原元只含不高于六阶若当块矩阵群的幂单性

杨新松, 马 畅

(哈尔滨理工大学 理学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对两个幂单矩阵生成的矩阵是否幂单的问题, 先利用矩阵对数工具得到了自由群生成元的新的组合性质。从这些新的组合性质出发, 证明了由一个若当块不高于二阶和若当块不高于五阶矩阵生成的群, 在本原元若当块不高于六阶的情况下, 当本原元素均幂单时, 生成的群是幂单群。这样就可以得出线性表示像满足同样条件的自由群也是幂单群。

关键词: 幂单群; 本原元; 自由群; 群表示

DOI: 10.15938/j.jhust.2019.01.021

中图分类号: O153.3 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2019)01-0124-08

The Unipotency of Linear Groups Generated by Matrices with Primitive Elements Contain no more than Six Jordan Blocks

YANG Xin-song, MA Chang

(Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to solve the problem of whether the matrices generated by two unipotent matrices are unipotency, a new combinatorial property of generators of free groups is obtained by using the matrix logarithmic tool. From the point of the combination of these new properties, it is proved that a Jordan block is not higher than two and if the order when the block is not higher than five order matrix generated group, when the block is not higher than six order, the primitive element is unipotency, the group generated is unipotent group.

Keywords: unipotent group; primitive element; free group; group representation

0 引 言

21 世纪代数界的最大成就就是完成了有限单群的分类, 接下来的工作自然是无限群。由于任意群均同构于自由群的像, 因此, 无限自由群的研究具有十分重要意义。特别是在研究自由群的同构群的时候, 其本原元素是幂单的^[1]。于是研究本原元幂单条件下的自由群的性质成了代数中一个趋向。

自从 Plotonov 提出幂单性研究以来, 本原元幂单的自由群的幂单性已经取得了一些进展^[2-14], 也有国内外学者对此表现出了兴趣。同时, 与幂单性相关联的研究也取得了很多好的结果^[11-20]。就幂单性质而言, 2016 年有一个最新的结论如下:

定理 A: 若二元生成矩阵群的本原元素 P 均满足 $(P - E)^5 = 0$ 并且至少有一个本原元 A 满足 $(A - E)^2 = 0$, 则此二元生成矩阵群是幂单群^[14]。

本文将力求推广此定理。定理 A 中要求每个

收稿日期: 2017-03-13

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 马 畅(1993—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 杨新松(1972—), 男, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: yangxinsong2005@163.com。

本原元的若当标准型里面不含高于五阶的若当块。本文考虑每个本原元素若当标准型不含高于六阶若当块。也就是要证明:

定理1 如果矩阵 A, B 生成的矩阵群中, 每个本原元素 P 均满足 $(P - E)^6 = 0$, 并且 $(B - E)^5 = 0$, $(A - E)^2 = 0$, 则此二元生成矩阵群是幂单群。

在以下论述中, G 一直表示 $A = E + H, B = E + T$ 生成的矩阵群, 其中 $T^5 = 0, H^2 = 0, E$ 是单位矩阵。在 G 中的每个本原元素 P 均满足 $(P - E)^6 = 0$ 。本文中提到的本原元素的结构形式都是根据文 [1] 中结论。

由于矩阵 $(B - E)^5 = 0$, 因此根据对数运算规则, 可以记

$$F = f(T) = \log B = T - \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{3}T^3 - \frac{1}{4}T^4, T = f^{-1}(F) = \exp(F) - E = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$$

此外, 文中将用 $W(X^m, Y^n, Z^k, Q^t)$ 表示 X, Y, Z, Q 的乘积组合, 其中各个字母的总次数依次是 m, n, k, t 。例如

$$W(H^4, F) = H^4F + H^3FH + H^2FH^2 + HFH^3 + FH^4$$

下面来看定理证明的准备。

1 引理

引理1 [1] 如果 H 和 T 有共同的特征向量, 则 G 是幂单群。

注意到 $T = f^{-1}(F) = \exp(F) - E = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$, 所以, 当 H 和 F 有共同的特征向量时, H 和 T 有共同的特征向量, 于是由引理1可得:

引理2 如果 H 和 F 有共同的特征向量, 则 G 是幂单群。

由于文 [1] 中已经证明了表示维数是7的结论, 因此可以得到:

引理3 如果 H 和 F 或者 H 和 T 有共同的维数小于7的非零不变子空间, 那么 G 是幂单群。

根据文 [1] 矩阵 A, B 生成的自由群和 A, BA 生成的自由群相同。因此还有:

引理4 如果 H 和 AB 或者 H 和 BA 有共同的维数小于7的非零不变子空间, 那么 G 是幂单群。

上面的三个结论从公式描述的角度看就可以如下表达:

引理5 如果 G 不是幂单群, 那么元素 $X=0$ 的充要条件是下列等式之一成立。

1) $HX = TX = 0$; 2) $HX = FX = 0$; 3) $XH = XT = 0$; 4) $XH = XF = 0$ 。

下面来看生成元的一些组合性质。

引理6 在群 G 中, 必有 $HTHT^3H + HT^3HTH + HT^2HT^2H = THTHTHT$ 。

证明: 根据文 [1] 知, 对于任意的正整数 $m, A^m B$ 是本原元。因此, 根据定理条件知, $(A^m B - E)^6 = 0$ 。注意到 $H^2 = 0, (A^m B - E)^6 = 0$ 也就是 $(mHB + T)^6 = 0$ 。此式展开后按照 m 的升幂排列为

$$D_0 + D_1 m + D_2 m^2 + D_3 m^3 + D_4 m^4 + D_5 m^5 + D_6 m^6 = 0$$

依次取 m 为不同的整数 $m_t, t = 1, 2, \dots, 7$ 并根据范德蒙行列式性质以及克莱姆法则可得: $D_t = 0, t = 0, 1, \dots, 6$ 。

根据 $D_1 = 0$ 可以得到 $T^4 HBT + T^3 HBT^2 + T^2 HBT^3 + THBT^4 = 0$ 。注意到 T 与 B 可交换, 因此可以在右侧消去可逆矩阵 B 得

$$T^4 HT + T^3 HT^2 + T^2 HT^3 + THT^4 = 0 \quad (1)$$

这个式子两端左乘或者右乘 T 的幂可分别得到:

$$T^4 HT^2 + T^3 HT^3 + T^2 HT^4 = 0 \quad (2)$$

$$T^4 HT^3 + T^4 HT^3 = 0 \quad (3)$$

$$T^4 HT^4 = 0 \quad (4)$$

根据 $D_2 = 0$, 右侧的矩阵 B 并将不在右侧的矩阵 B 都展为 $E + T$, 并利用式(1) ~ (4) 化简得

$$HT^4 H + T^3 HTH + T^2 HT^2 H + THT^3 H + HT^3 HT + HT^2 HT^2 + HTHT^3 + T^3 HTHT + THT^3 HT + TH - THT^3 + THT^2 HT^2 + T^2 HTHT^2 + T^2 HT^2 HT + T^2 HTHT + THT^2 HT + THTHT^2 = 0 \quad (5)$$

式(5)两端左乘 T^4 得

$$T^4 HT^3 HT + T^4 HTHT^3 + T^4 HT^2 HT^2 = 0 \quad (6)$$

类似地, 分别用 T^3, T^2, T 左乘式(5)两端并不断用得到的式子化简可得

$$T^3 HT^3 HT + T^3 HTHT^3 + T^3 HT^2 HT^2 + T^4 HTHT^2 + T^4 HT^2 HT = 0 \quad (7)$$

$$T^4 HTHT + T^2 HT^3 HT + T^2 HTHT^3 + T^2 HT^2 HT^2 + T^3 HTHT^2 + T^3 HT^2 HT = 0 \quad (8)$$

$$T^3 HTHT + THT^3 HT + THTHT^3 + THT^2 HT^2 + T^2 HTHT^2 + T^2 HT^2 HT = 0 \quad (9)$$

此时的式(5)可以化简为

$$HT^4 H + T^3 HTH + T^2 HT^2 H + THT^3 H + HT^3 HT$$

$$+ HT^2 HT^2 + HTHT^3 + T^2 HTHT + THT^2 HT + TH - THT^2 = 0 \quad (10)$$

(10) 式两端左乘、右乘 H 可得

$$- (HT^3 HTH + HT^2 HT^2 H + HTHT^3 H) = H (T^2 HTHT + THT^2 HT + THTHT^2) = (T^2 HTHT + THT^2 HT + THTHT^2) H \quad (11)$$

类似地,根据 $D_3 = 0$ 可并结合(1),(9)和(11)化简得

$$T^2 HTHTHT + THTHTHT^2 + THT^2 HTHT + THTHT^2 HT + 2THTHTHT + THTHTH + HTHTHT + HT^2 HTH + HTHT^2 H = 2(HT^3 HTH + HT^2 HT^2 H + HTHT^3 H) \quad (12)$$

(12) 式两端右乘 H 得 $T^2 HTHTHTH + 2THTHTHTH + HTHTHTH = 0$ 。也就是 $B^2 HTHTHTH = 0$ 。消去左侧的矩阵 B 得到

$$HTHTHTH = 0 \quad (13)$$

(12) 式还可以化简为 $B(HTHTHT + THTHTH + HT^2 HTH + HTHT^2 H)B = 0$, 两端消去矩阵 B 得到

$$HTHTHT + THTHTH + HT^2 HTH + HTHT^2 H = 0 \quad (14)$$

结合(11)可得

$$HT^3 HTH + HT^2 HT^2 H + HTHT^3 H = THTHTHT \quad (15)$$

引理证毕。

引理6研究的是固定矩阵 B 的幂指数是一时本原元的性质,下面是固定矩阵 A 的幂指数是一的情况。

引理7 在群 G 中, $F^3 HF^3 HF^3 HF^3 = 0$ 。

证明: 首先根据 $F = T - \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{3}T^3 - \frac{1}{4}T^4$, 直接演算即得

$$F^4 HF^4 = 0 \quad (16)$$

$$F^4 HF^3 + F^4 HF^3 = 0 \quad (17)$$

$$F^4 HF^2 + F^3 HF^3 + F^2 HF^4 = 0 \quad (18)$$

$$F^4 HF + F^3 HF^2 + F^2 HF^3 + FHF^4 = 0 \quad (19)$$

其次,根据文[2]知 $B^m A$ 是本原元,因此 $(B^m A - E)^6 = 0$ 。此式也可以记做 $(\exp[mF]A - E)^6 = 0$, 计算为

$$(A - E + mFA + \frac{1}{2}m^2 F^2 A + \frac{1}{6}m^3 F^3 A + \frac{1}{24}m^4 F^4 A)^6 = 0$$

此式记作 $(N_0 + N_1 m + N_2 m^2 + N_3 m^3 + N_4 m^4)^6 = 0$ 。此式的展开式按照 m 的升幂排列为

$$L_0 + L_1 m + L_2 m^2 + \cdots + L_{24} m^{24} = 0 \quad (20)$$

同样,依次取 m 为不同的整数 $m_t, t = 1, 2, \cdots, 25$, 根据范德蒙行列式性质以及克莱姆法则可以得到 $L_t = 0, t = 1, 2, \cdots, 25$ 。

根据 $L_3 = 0$, 可得 $W(N_0^5, N_3) + W(N_0^4, N_1, N_2) + W(N_0^3, N_1^3) = 0$, 考虑到 $N_0^2 = H^2 = 0$, 因此,只剩下 $W(N_0^3, N_1^3) = 0$ 。注意到 $AH = H$, 右侧消去矩阵 A 后用式(16)~(19)化简为:

$$HF^2 HFH + HFHF^2 H + HFHFHF + FHFHFH + 2HFHFHFH = 0$$

此式乘 H 得:

$$HFHFHFH = 0 \quad (21)$$

将(21)式代回到前一个式子得到

$$HFHF^2 H + HF^2 HFH + HFHFHF + FHFHFH = 0 \quad (22)$$

用同样的方法,从 $L_4 = 0$ 得到

$$HF^4 H + F^3 HFH + F^2 HF^2 H + FHF^3 H + HF^3 HF + HF^2 HF^2 + HFHF^3 + F^2 HFHF + FHF^2 HF + FHFHF^2 = 0 \quad (23)$$

此式乘 H 得到

$$HF^3 HFH + HF^2 HF^2 H + HFHF^3 H = FHFHFH - HF \quad (24)$$

(23) 式依次乘 F^4, F^3, F^2, F 并利用已得到的式子化简可依次得

$$F^4 HF^3 HF + F^4 HFHF^3 + F^4 HF^2 HF^2 = 0 \quad (25)$$

$$F^3 HF^3 HF + F^3 HFHF^3 + F^3 HF^2 HF^2 + F^4 HFHF^2 + F^4 HF^2 HF = 0 \quad (26)$$

$$F^4 HFHF + F^2 HF^3 HF + F^2 HFHF^3 + F^2 HF^2 HF^2 + F^3 HFHF^2 + F^3 HF^2 HF = 0 \quad (27)$$

$$F^3 HFHF + FHF^3 HF + FHFHF^3 + FHF^2 HF^2 + F^2 HFHF^2 + F^2 HF^2 HF = 0 \quad (28)$$

使用同样的技巧,从 $L_5 = 0$ 得到

$$HFHF^2 HF^2 + HF^2 HFHF^2 + HF^2 HF^2 HF + F^2 HF^2 HFH + F^2 HFHF^2 H + FHF^2 HF^2 H + HF^2 HF^3 H + HF^3 HF^2 H = 0 \quad (29)$$

以及

$$HFHF^2 HF^2 H + HF^2 HFHF^2 H + HF^2 HF^2 HFH = 0 \quad (30)$$

从 $L_6 = 0$ 化简为

$$4HF^2 HF^2 HF^2 H + 5(HF^2 HF^2 HF^2 + F^2 HF^2 HF^2 H) + 2F^2 HF^2 HF^2 - 4(F^4 HFHFH + HFHF^4 HFH + HFHFHF^4 H) - 2(F^4 HFHF + FHF^4 HF + FHFHF^4) - 5(HF^4 HFHF + HFHF^4 HF)$$

$$+ HFHFHF^4 + F^4 HFHFH + FHF^4 HFH + FHFHF^4 H) - 6(F^3 HFHFHF + FHF^3 HFHF + FHF^3 HF + FHFHFHF^3) = 0 \quad (31)$$

在式(31)两端同时从左右两侧各乘 H 得到

$$HF^4 HFHFH + HFHF^4 HFH + HFHFHF^4 H = HF^2 HF^2 HF^2 H \quad (32)$$

在式(31)两端同时左乘 H 并利用式(32)化简得到

$$HF^4 HFHF + HFHF^4 HF + HFHFHF^4 = HF^2 HF^2 HF^2 \quad (33)$$

在式(31)中用 $-H$ 替代 H 再与式(31)比较, 并且利用式(32), (33)化简得到:

$$F^4 HFHF + FHF^4 HF + FHFHF^4 = F^2 HF^2 HF^2 \quad (34)$$

以及

$$F^3 HFHFHF + FHF^3 HFHF + FHFHF^3 HF + FHFHFHF^3 = 0 \quad (35)$$

利用式(24)对式(35)变形得到

$$F^3 HFHFHF + FHFHFHF^3 + F^2 HFHFHF^2 = FHF^2 HF^2 HF \quad (36)$$

在式(34)左侧乘以 F^3 得到

$$F^4 HFHF^4 = 0 \quad (37)$$

在式(34)左侧乘以 F^2 得到 $F^3 HF^4 HF + F^3 HFHF^4 = F^4 HF^2 HF^2$ 利用式(17), (25)进行变形可得

$$F^4 HFHF^3 + F^3 HFHF^4 = 0 \quad (38)$$

类似地, 用 F 乘式(34)得到 $F^4 HFHF^2 + FHF^4 HF^2 = F^2 HF^2 HF^3$, 利用式(26), (18)可得

$$F^4 HFHF^2 + F^3 HFHF^3 + F^2 HFHF^4 = 0 \quad (39)$$

而且, 式(34)也可以利用式(19), (27)变形为

$$F^4 HFHF + F^3 HFHF^2 + F^2 HFHF^3 + FHFHF^4 = 0 \quad (40)$$

将式(8)中的 T 换作 $F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$,

比较式(27)后用式(16) ~ (30)化简得到 $4(F^4 HF^3 HF^3 + F^3 HF^3 HF^4) + 5F^4 HF^3 HF^3 = 0$ 。利用(17)式化简为

$$F^4 HF^3 HF^3 = 0 \quad (41)$$

在式(18)左侧乘 $F^4 H$ 得 $F^4 HF^3 HF^3 + F^4 HF^2 HF^4 + F^4 HF^4 HF^2 = 0$ 利用式(16), 式(41)化简得

$$F^4 HF^2 HF^4 = 0 \quad (42)$$

式(26)乘 F 并用式(38)化简得

$$F^3 HF^3 HF^2 + F^4 HF^2 HF^2 + F^3 HF^2 HF^3 = 0$$

于是有 $F^3 HF^2 HF^3 = -F^3 HF^3 HF^2 - F^4 HF^2 HF^2 = F^2 HF^4 HF^2$, 也就是

$$F^3 HF^2 HF^3 = F^2 HF^4 HF^2 \quad (43)$$

类似地, 利用式(26)结合式(18) (39)可以变形整理得到

$$F^3 HF^2 HF^2 + F^2 HF^3 HF^2 + F^2 HF^2 HF^3 = 0 \quad (44)$$

将式(29)乘 F^2 利用式(44)化简, 再利用式(22)变形得到

$$FHF^2 HF^2 HF^2 = FHFHFHF^4 + F^3 HFHFHF^2 + F^2 HFHFHF^3 \quad (45)$$

此式两端同时左乘以 F 右乘 F^2 得到

$$F^2 HF^2 HF^2 HF^4 = F^4 HFHFHF^4 \quad (46)$$

于是, 根据式(18) (41) (19) (43)式直接计算得

$$F^3 HF^3 HF^3 HF^3 = 0 \quad (47)$$

引理证毕。

可以看到, 在上述证明过程中, 研究本原元素组合性质的主要方法是讨论 $L_t = 0, t = 1, 2, \dots, 24$ 。但是, 这个方法却并不能完成定理证明, 组合的讨论必须要用到更多技巧。

引理 8 设群 G 不是幂单群, 那么 $(A^n B^m - E)^6 = 0$, 并且对于关于 H, B 的文字 $w_i(H, B)$, 如果表达式 $\sum_{i=1}^s w_i(H, B) = 0$, 一定有 $\sum_{i=1}^s w_i(H, B^m) = 0$ 。

证明: 假设群 G 不是幂单群。

比较式(28)和(9)得

$$F^3 HF^3 HF^3 = 0 \quad (48)$$

同理, 比较式(10)和(23)式并利用式(48)化简得

$$F^2 HF^3 HF^3 + F^3 HF^3 HF^2 + F^3 HF^2 HF^3 = 0 \quad (49)$$

同时, 根据式(16), (17), (18), (19)又有

$$F^4 HF^2 HF^2 + F^2 HF^4 HF^2 + F^2 HF^2 HF^4 = 0 \quad (50)$$

比较式(14)式和式(22)得

$$(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3)H + H(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3) = 0 \quad (51)$$

利用式(51)又可推导得到

$$H(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3)H = 0, \\ F(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3)H = 0$$

由引理 5 可得

$$(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3)H = 0$$

又由 $(F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3)F = F^3 HF^3 HF^2 - F^2 HF^2 HF^4 = 0$ 并根据引理 5 可知,

$$F^3 HFHF^3 + F^3 HF^3 HF + FHF^3 HF^3 = 0 \quad (52)$$

此时, 利用式(52)和式(25)计算得

$$F^3 HF^3 HF^2 = F^2 HF^2 HF^4 \quad (53)$$

同理有

$$F^4 HF^2 HF^2 = F^2 HF^3 HF^3 \quad (54)$$

利用式(49)和式(44)计算得

$$F^2 HF^3 HF^3 HF^2 = F^3 HF^2 HF^2 HF^3 \quad (55)$$

根据式(35), (52)得

$$F^3 HFHFHF^3 = FHF^3 HF^3 HF \quad (56)$$

经过类似地推导,可以利用式(48)式(52)式(24)式(55)以及式(35),式(24)得到

$$F^4 HFHFHF^4 = F^2 HF^3 HF^3 HF^2 = F^3 HF^2 HF^2 HF^3 \quad (57)$$

$$F^3 HFHFHF + F^2 HFHFHF^2 + FHFHFHF^3 = FHF^2 HF^2 HF \quad (58)$$

$$F^3 HFHFHF^2 + F^2 HFHFHF^3 + FHFHFHF^4 = FHF^2 HF^2 HF^2 \quad (59)$$

$$F^3 HFHFHF^2 + F^2 HFHFHF^3 + F^4 HFHFHF = F^2 HF^2 HF^2 HF \quad (60)$$

在这个情况下,计算发现, $L_t = 0, t = 7, 8, \dots, 24$ 成为了恒等式,也就是说从这些式子中不会有新的条件。由于直接计算这些式子就会是0,因此得到 $(B^m A^2 - E)^6 = 0, (B^m A^3 - E)^6 = 0, \dots, (B^m A^n - E)^6 = 0$ 。类似地就有 $(A^n B^m - E)^6 = 0$ 。由于 B 与 B^m 满足同样的等式条件,所以只要得到一个 H, B 的等式,那么把其中的 B 换成 B^m 后仍然成立。

引理得证。

下面就可以完成定理证明了。为了简洁,将不再赘述对称的式子的证明。也就是说,一旦得到了某一个式子(例如式(59)),那么它的对称式子(式(60))就自然成立。

2 定理证明

使用反证法。假设群 G 不是幂单群。那么前面的引理都成立。所得到的式子都可用。根据式子(30), (48), (49), (50), (52), (19), (34) 并利用 $T = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$, 计算得:

$$HTHT^2 HT^2 H + HT^2 HTHT^2 H + HT^2 HT^2 HTH + \frac{1}{2}HT^2 HT^2 HT^2 H = 0 \quad (61)$$

于是根据式(14), 式(61)有 $HT^2 HTHTHT^2 H = \frac{1}{2}HTHT^2 HT^2 HT^2 H + HTHT^2 HT^2 HTH$ 。再将 $T = F +$

$\frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$ 代入此式中可化简左边最终得到

$$HT^2 HTHTHT^2 H = HF^2 HFHFHF^2 H + \frac{1}{2}HF^2 HF^2 HF^2 HFH + \frac{1}{4}HF^3 HFHFHF^3 H + \frac{1}{36}HF^4 HFHFHF^4 H$$

同样,右边为

$$\frac{1}{2}HTHT^2 HT^2 HT^2 H + HTHT^2 HT^2 HTH = HF^2 HF^2 HF^2 HFH + \frac{1}{2}HFHF^2 HF^2 HF^2 H + \frac{1}{6}HF^2 HF^2 HF^2 HF^2 H - \frac{3}{8}HF^3 HF^2 HF^2 HF^2 H - \frac{5}{6}HF^3 HFHFHF^3 H - \frac{1}{16}HF^4 HF^2 HF^2 HF^2 H$$

比较两边得到

$$0 = (HF^2 HFHFHF^2 H - HFHF^2 HF^2 HFH) + \frac{13}{12}HF^3 HFHFHF^3 H + \frac{13}{144}HF^4 HFHFHF^4 H + \frac{1}{4}HF^3 HF^2 HF^2 HF^2 H$$

根据引理8,将这个式子中的 B 换做 B 的任意次幂仍然成立。注意到 $\log B^m = m \log B = mF$, 所以有

$$0 = (HF^2 HFHFHF^2 H - HFHF^2 HF^2 HFH) m^6 + \frac{13}{12}HF^3 HFHFHF^3 H m^8 + \frac{13}{144}HF^4 HFHFHF^4 H m^{10} + \frac{1}{4}HF^3 HF^2 HF^2 HF^2 H m^9$$

于是,取不同的自然数 m 并根据范德蒙行列式特点和克莱姆法则可知

$$HF^2 HFHFHF^2 H - HFHF^2 HF^2 HFH = 0 \quad (62)$$

$$HF^3 HFHFHF^3 H = 0 \quad (63)$$

$$HF^4 HFHFHF^4 H = 0 \quad (64)$$

$$HF^3 HF^2 HF^2 HF^2 H = 0 \quad (65)$$

由于 $HF^4 HFHFHF^4 H = 0, FF^4 HFHFHF^4 H = 0$ 所以根据引理5知 $F^4 HFHFHF^4 H = 0$ 。同理可得 $F^4 HFHFHF^4 = 0$ 。再根据(57)式可知

$$F^4 HFHFHF^4 = F^2 HF^3 HF^3 HF^2 = F^3 HF^2 HF^2 HF^3 = F^4 HF^2 HF^2 HF^2 = 0 \quad (66)$$

同样,利用 $HF^3 HF^2 HF^2 HF^2 H = 0, F^3 HF^2 HF^2 HF^3 = 0$ 以及引理5可知

$$F^3 HF^2 HF^2 HF^2 = 0 \quad (67)$$

仿效式(62) ~ (65)的推导过程把 $T = F + \frac{1}{2}F^2$

$+\frac{1}{6}F^3+\frac{1}{24}F^4$ 代入

$$\begin{aligned} & HT^3HTHTHT + HT^2HTHTHT^2 - \\ & HTHT^2HT^2HT = -\frac{1}{2}HT^2HT^2HT^2HT \end{aligned} \quad (68)$$

化简比较两边 F 的次数可得

$$HF^3HFHFHF^3 = 0 \quad (69)$$

$$HF^4HFHFHF + HFHF^2HF^2HF^2 = HF^2HF^2HF^2HF \quad (70)$$

由于 $HF^3HFHFHF^3 = 0$, 所以 $HF^3HFHFHF^4 = 0$ 。也就是 $HFHF^2HF^2HF^4 = 0$ 。由 $HF-HF^2HF^2HF^4 = 0$, $F^2HF^2HF^2HF^4 = F^4HF^2HF^2HF^2 = 0$ 以及引理 5 可知 $FHF^2HF^2HF^4 = 0$ 。再根据 $FHF^2HF^2HF^4 = 0$, $HHF^2HF^2HF^4 = 0$ 以及引理 3 得到 $HF^2HF^2HF^4 = 0$ 。再考虑式(53)便有

$$HF^3HF^3HF^2 = HF^2HF^2HF^4 = 0 \quad (71)$$

另一方面, 根据式(69)和(56)有 $HF-HF^3HF^3HF = 0$ 。再根据 $HFHF^3HF^3HF = 0$, $HF-HF^3HF^3HH = 0$ 以及引理 5 知 $HFHF^3HF^3H = 0$ 。对称地可以得到, $HF^3HF^3HFH = 0$ 。利用 $HF^3HF^3HFH = 0$, 式(71)以及引理 5 可知 $HF^3HF^3HF = 0$ 。仍然是利用引理 5, 结合 $HF^3HF^3HF = 0$ 和 $HF^3HF^3HH = 0$ 可得

$$HF^3HF^3H = 0 \quad (72)$$

在式子(58)两侧从左边乘 F , 并注意到 $F^3HFHFHF^3 = FHF^3HF^3HF = 0$ 可以得到 $F^4HFHFHF^2 = F^3HF^2HF^2HF$ 也就是 $(F^4HFHFHF - F^3HF^2HF^2H)F = 0$ 。再由 $(F^4HFHFHF - F^3HF^2HF^2H)H = 0$ 以及 $(F^4HFHFHF - F^3HF^2HF^2H)F = 0$ 和引理 5 可得

$$F^4HFHFHF = F^3HF^2HF^2H \quad (73)$$

把 $F = T - \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{3}T^3 - \frac{1}{4}T^4$ 代入(29)化简得

$$\begin{aligned} & HTHT^2HT^2 + HT^2HTHT^2 + HT^2HT^2HT + \\ & T^2HT^2HTH + T^2HTHT^2H + THT^2HT^2H + \\ & HT^2HT^3H + HT^3HT^2H + \frac{1}{2}HT^2HT^2HT^2 + \frac{1}{2} \\ & T^2HT^2HT^2H = 0 \end{aligned}$$

利用此式以及式(9), 式(14)化简 $T^3HTHTHT + THT^3HTHT + THTHT^3HT + THTHTHT^3$:

$$\begin{aligned} & T^3HTHTHT + THT^3HTHT + THTHT^3HT + \\ & THTHTHT^3 = \frac{1}{2}THT^2HT^2HT^2 + \frac{1}{2}T^3HT^2HT^2H \end{aligned}$$

此结果从左边乘 H 并与式(68)比较得到 $HT^3HT^2HT^2H = 0$ 。由式(72)和式(54)有

$$TT^3HT^2HT^2H = T^4HT^2HT^2H = T^2HT^3HT^3H$$

$= 0$

于是, 结合这两个结果 $HT^3HT^2HT^2H = 0$, $TT^3HT^2HT^2H = 0$ 利用引理 5 得到

$$T^3HT^2HT^2H = 0 \quad (74)$$

把式(52)、(74)代入式(15)可得 $T^4HTHTHT = T^3HT^2HT^2H = 0$ 。再根据引理 5 知 $T^4HTHTH = 0$

$$T^4HTHTH = 0 \quad (75)$$

如果把代入 $T^4HTHTHT = T^3HT^2HT^2H = 0$ 式还可得到

$$F^4HFHFHF = F^3HF^2HF^2H = F^4HFHFH = 0 \quad (76)$$

结合式(70), (76)知 $HFHF^2HF^2HF^2 = HF^2HF^2HF^2HF$ 。此式再结合式(76)可知 $HF^2HF^2HF^2HF^2 = 0$ 。结合 $HF^2HF^2HF^2HF^2 = 0$ 以及式(67), 根据引理 3 可得

$$F^2HF^2HF^2HF^2 = 0 \quad (77)$$

根据 $F^4HFHFH = 0$, 的推导过程, 可以对称地得到 $HFHFHF^4 = 0$ 。于是, 利用式(34)可得

$$HF^2HF^2HF^2HFH = HFHF^4HFHFH + HFHF-HF^4HFH + HF^4HFHFHFH = 0$$

结合此式和式(76)、(77)以及引理 5 可得 $F^2HF^2HF^2HF = 0$ 。再次使用引理 5, 从 $F^2HF^2HF^2HF = 0$ 可知 $F^2HF^2HF^2H = 0$ 。对称地可以得到 $F^2HF^2HF^2H = 0$ 。此即

$$F^2HF^2HF^2H = HF^2HF^2HF^2 = 0 \quad (78)$$

将此结论再代回到式(34)可得 $0 = F^2HF^2HF^2H = F^4HFHFH + FHF^4HFH + FHF-HF^4H$ 。也就是 $FHF^4HFH + FHFHF^4H = 0$ 。将此式结合引理 5 以及式(19)就得到

$$HF^4HFH + HFHF^4H = 0 = HF^2HF^3H + HF^3HF^2H \quad (79)$$

根据式(19)有 $F^3(HF^4H + HF^3HF + HF^2HF^2 + HFHF^3)F = 0$, 另一方面, 根据式(24)、(76)有

$$\begin{aligned} & F^3(HF^4H + HF^3HF + HF^2HF^2 + HFHF^3)H = \\ & F^3HF^3HFH + F^3HF^2HF^2H + F^3HFHF^3H = \\ & F^4HFHFHF = 0 \end{aligned}$$

根据引理 5 可知

$$F^3HF^4H + F^3HF^3HF + F^3HF^2HF^2 + F^3HFHF^3 = 0 \quad (80)$$

比较式(80)与(26)可知

$$F^3HF^4H = F^4HF^2HF + F^4HFHF^2 \quad (81)$$

类似地, 利用式(1)、(15)、(7)、(75)可得

$$T^3HT^4H = T^4HT^2HT + T^4HTHT^2 \quad (82)$$

由于 $(A^nB - E)^6 = 0$, 也就是说 $(A^nAB - E)^6 = 0$ 。记 $AB - E = N$ 则运用推导(1)~(4)的方法可

得 $N^4HN^5 + N^5HN^4 = 0, N^5HN^5 = 0$ 。用类似地方式讨论 $(A^kA^k - E)^6 = 0$ 则可得到类似的式子,于是有

$$0 = (T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)H(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)k^2 + [T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)H(T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + T^2HTH + THT^2H + THTHT) + (T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + HT^2HT + HTHT^2 + THTHT)H(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)]k^3 + (T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + HT^2HT + HTHT^2 + THTHT) \cdot H \cdot (T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + T^2HTH + THT^2H + THTHT)k^4$$

依次取不同的 k , 利用范德蒙行列式以及克莱姆法则就得到

$$(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)H(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT) = 0 \quad (83)$$

$$(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT)H(T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + T^2HTH + THT^2H + THTHT) + (T^2HTHT + THT^2HT + THTHT^2 + HT^2HT + HTHT^2 + THTHT)H(T^2HT^2 + THT^3 + T^3HT) = 0 \quad (84)$$

其中 k^4 的系数项为零已经涵盖在前面的各个式子之中顾不列出。

式(83)左乘 T 并用式(1)、(75)化简可得

$$T^4HTHT^2HT^2 + T^4HTHT^3HT = 0 \quad (85)$$

同样,从式(84)可以化简出

$$T^3HT^2HTHTHT + THTHTHT^2HT^3 = 0 \quad (86)$$

式(86)右乘 T^2 得到 $T^3HT^2HTHTHT^3 = 0$, 结合式(68)右乘 T 以及式(78)可得 $T^3HT^3HTHTHT^2 = 0$ 。根据引理5可知 $T^3HT^3HTHTHT = 0$ 进而

$$T^3HT^3HTHTH = 0 \quad (87)$$

把 $T = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$ 代入(83)中化简后的结果就是把(83)中 T 换成 F 。因此可以得到

$$F^4HFHF^2HF^2 + F^4HFHF^3HF = 0 \quad (88)$$

把 $T = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$ 代入(86)中化简后得

$$F^3HF^2HFHFHF + FHFHFHF^2HF^3 - \frac{1}{2}(F^3HF^3HFHFHF + FHFHFHF^3HF^3) = 0$$

根据引理8,把此式中 F 换成 $2F$ 仍然成立。即有

$$F^3HF^2HFHFHF + FHFHFHF^2HF^3 - (F^3HF^3HFHFHF + FHFHFHF^3HF^3) = 0$$

所以有 $F^3HF^2HFHFHF + FHFHFHF^2HF^3 = F^3HF^3HFHFHF + FHFHFHF^3HF^3 = 0$ 。于是得到了与(86)、(87)对应的式子

$$F^3HF^2HFHFHF + FHFHFHF^2HF^3 = F^3HF^3HFHFHF = 0 \quad (89)$$

利用式(22),式(76)和式(89)可以得到

$$(F^3HF^3HFHF^2 + F^3HF^3HF^2HF)H = F^3HF^3HFHF^2H + F^3HF^3HF^2HFH = -F^3HF^3HFHFHF - F^3HF^4HFHFH = 0$$

另一方面利用式(72),式(80)和式(48)可以得到

$$(F^3HF^3HFHF^2 + F^3HF^3HF^2HF)F = F^3HF^3HFHF^3 + F^3HF^3HF^2HF^2 = F^3HF^3HFHF^3 + F^3HF^3HF^3HF + F^3HF^3HF^2HF^2 = F^3HF^3HF^4H = 0$$

利用这两个式子结合引理5就得到 $F^3HF^3HFHF^2 + F^3HF^3HF^2HF = 0$ 。再结合式(89)以及引理5即得

$$F^3HF^3HFHF + F^3HF^3HF^2H = 0 \quad (90)$$

类似地推导也可以得到

$$T^3HT^3HTHT + T^3HT^3HT^2H = 0 \quad (91)$$

把 $T = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 + \frac{1}{24}F^4$ 代入式(91)中化简后得

$$\frac{1}{2}(F^3HF^3HFHF^2 + F^3HF^3HF^2HF) + \frac{1}{12}F^3HF^3HF^2HF^2 + \frac{1}{24}F^3HF^3HF^2HF^3 = 0$$

根据引理8,这个式子中的 F 换成 $3F, 2F$ 仍然成立。因此利用范德蒙行列式以及克莱姆法则可知

$$F^3HF^3HFHF^2 + F^3HF^3HF^2HF = F^3HF^3HF^2HF^2 = F^3HF^3HF^2HF^3 = 0 \quad (92)$$

根据式(92),式(78)可知 $FF^2HF^3HF^2HF^2 = HF^2HF^3HF^2HF^2 = 0$ 。此结果结合引理5就有

$$F^2HF^3HF^2HF^2 = 0 \quad (93)$$

看式(89): $F^3HF^2HFHFHF + FHFHFHF^2HF^3 = 0$ 。右乘 F 得 $F^3HF^2HFHFHF^2 + FHFHFHF^2HF^4 = 0$ 。

利用式(18),(76)以及(89)后面的等号部分得 $FHFHFHF^2HF^4 = -FHFHFHF^3HF^3 - FHFHFHF^4HF^2 = 0$ (这里用的是对称的式子)。因此有 $F^3HF^2HFHFHF^2 = 0$ 。接下来使用推导式(87)式的方法,连续使用引理5就得到

$$F^3HF^2HFHFH = 0 \quad (94)$$

同样,利用式(86),(87)等式子可以类似地推导出 $T^3HT^2HTHTH = 0$ 。把 $T = F + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{6}F^3 +$

$\frac{1}{24}F^4$ 代入 $T^3HT^2HTHTH=0$ 中化简并与式(93)比较得到 $F^3HF^2HFHF^2H=0$ 。再结合式(30),(78)可得

$$F^3HFHF^2HF^2H=0 \quad (95)$$

$F^3HFHF^2HF^2H=0$ 因此 $F^2HFHF^3HF^2H + FHFHF^4HF^2H=0$ 也就是 $FHFHF^2HF^3H=HF-HF^4HF^2H$ 。同理还有 $HF^3HF^2HFHF=HF^2HF^4HFH$ 。利用(80)、(81) $F^3HF^4H=F^4HF^2HF+F^4HFHF^2$, $F^3HF^4H+F^3HF^3HF+F^3HF^2HF^2+F^3HFHF^3=0$ 这两个式子以及 $F^2HF^2HF^2=F^3HF^3H+HF^3HF^3$ 得到 $HF^4HF^2HF^3=HF^3HF^4HF^2=(F^2HF^2HF^2-F^3HF^3H)FHF^2=-F^3HF^3HFHF^2$ 。也就是

$$HF^4HF^2HF^3+F^3HF^3HFHF^2=0。$$

注意到右边去掉 F 换做 H 仍然是 0, 因此有 $HF^4HF^2HF^2+F^3HF^3HFHF=0$ 。另一方面, $HF^4HF^2HF^2=HF^3HF^4HF=F^2HF^2HF^3HF-F^3HF^3HFHF$ 。比较就发现 $F^2HF^2HF^3HF=0$ 。进而由引理 5 可知 $F^2HF^2HF^3H=0$ 。此结果代回到(80)中 $HF^3HF^4H=HFHF^3HF^3$ 。于是 $HF^3HF^4HF^2=0$ 。由引理 8 知 $F^3HF^4HF^2=0$ 。如此一来, 反复使用引理 8 就有 $F^2HF^2HF^2=0$ 。那么就有 $F^3HF^3H+HF^3HF^3=0$ 。那么 $F^2HF^3HF^3=0$ 。再看到 $F^2HF^2HF^3H=0$, 就有 $F^2HF^3HF^2=0$ 进而 $F^2HF^4HF^2=0$ 。代入到(88) $F^4HFHF^2HF^2+F^4HFHF^3HF=0$ 中就有 $F^4HFHF^3=0$, 再用(25)式可得 $F^4HF^3HF=0$ 。连续使用引理 8 得到 $F^4HF^3=0$, 并进而有 $F^3HF^3=0$ 。

在这种情况下, $F^3HF^2HFH, F^3HF^2HFHF, F^3HF^2HFHF^2, F^3HF^2HFHF^3, F^3HF^2HFHF^4$ 生成维数不超过 5 维的, A, B 的公共不变子空间。根据引理 4 知此空间为 0, 因此 $F^3HF^2HFH=0$ 。连续使用引理 8 可得到 $F^3HF^2=0$ 。一直推导发现 $F^4=0$ (此时群是幂单的)。矛盾。

定理得证。

参考文献:

- [1] PLATONOV V P, POTAPCHIK A E. New Combinatorial Properties of Linear Group Algebra [M]. Waterloo: Journal of Algebra, 2001: 3.
- [2] ТАВГЕНВ О И, САМСОНОВ Ю Б. Унипотентность Образа Представления $F_2(x, y)$ Матрицами из $GL(n, C)$, $n=2, 3, 4$, При Условии Отображения Образующих и Прimitивных Элементов в Унипотентные Матрицы [J]. Докл. НАН

Беларуси, 2001, 45(6): 29.

- [3] TAVGEN O I, DU JUNHUA, LIU CHUNYAN. The Representation Image Unipotency of the Group F_2 by Mapping Primitive Elements into Unipotent Matrices with Small Jordan Blocks [J]. Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2011, 3(8): 81.
- [4] ЯН СИНЬСУН. Линейные Представления Свободных Групп [M]. РИВШ: Минск, 2011: 11.
- [5] 杜君花, 谭鹏顺, 杨新松. 八阶线性群的幂单性质 [J]. 哈尔滨商业大学自然科学学报, 2012, 28(4): 461.
- [6] 谭鹏顺. 本原元幂单的二元生成自由群的幂单性 [J]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2013.
- [7] AN Jianbei, Charles William Eaton, Nilpotent Blocks of Quasisimple Groups for the Prime Two [J], Algebras and Representation Theory, 2013, 16(1): 1.
- [8] LIN Yanjun, SONG Xueling, XIONG Huan. Almost Simple DD-groups [J], 北京大学学报(自然科学版), 2013, 49(5): 741.
- [9] DAVID Sevir, NICO Groenewald. Generalization of Nilpotency of Ring Elements to Module Elements [J], Communications in Algebra, 2014, 42(2): 571.
- [10] 杨新松, 刘欢. 二元生成自由群的幂单性质 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2014, 19(6): 16.
- [11] ISAAC. A. Garcia, HECTOR Giacomini, JAUME Gine, et al. Analytic Nilpotent Centers as Limits of Nondegenerate Centers Revisited [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015: 893.
- [12] JASON Bell, JAIRO Goncalves, Free Algebras and Free Groups in Ore Extensions and Free Group Algebras in Division Rings [J]. Journal of Algebra, 2015: 235.
- [13] YU Fengyao, BIN Shu, Nilpotent Orbits of Certain Simple Lie Algebras over Truncated Polynomial Rings [J]. Journal of Algebra, 2015: 1.
- [14] BILLIG. Yuly, FUTORNY. Vyacheslav, Classification of Irreducible Representations of Lie Algebra of Vector Fields on a Torus [J]. Journal of Algebra, 2016(11): 199.
- [15] BURDE. D, MOENS. W. Commutative Post-Lie Algebra Structures on Lie Algebras [J], Journal of Algebra, 2016(12): 183.
- [16] 杨新松, 王那英. 标准型不高于五阶若当块矩阵群的幂单性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2016, 21(2): 112.
- [17] NEFF. Patrizio, EIDEL. Bernhard, MARTIN, et al. Geometry of Logarithmic Strain Measures in Solid Mechanics [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2016. 11. 507.
- [18] DANCHEV. Peter Vassilev, LAM. Tsit Yuen. Rings with Unipotent Units [J], Publications Mathematicae Debrecen, 2016. 449.
- [19] ANDRADA. A, VILLACAMPA. R, Abelian Balanced Hermitian Structures on Unimodular Lie Algebras [J]. Transformation Groups, 2016. 12. 903.
- [20] POGUDIN. G, RAZMYSLOV. Y, Prime Lie Algebras Satisfying the Standard Lie Identity of Degree 5 [J]. Journal of Algebra, 2016(12): 182.

(编辑: 关毅)